

Devoir de contrôle n°1Section : 4^{ème} Maths

Durée : 2 heures

Epreuve : Mathématiques

Prof : Troudi Kamel

Exercice n°1(4points)

Cocher la seule réponse exacte

1) Soit $f(x) = \frac{1}{(x - \frac{\pi}{2})\operatorname{tg}x}$ alors $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x)$ est égale:

- a) -1 b)
- $\frac{1}{2}$
- c)
- $+\infty$
- d) n'existe pas
- ∂
- .

2) On pose $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ et $g(x) = \frac{1}{\sin x}$ $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ alors l'expression de la fonction $(f \circ g)(x)$ est:

- a)
- $\frac{2 + \cos x}{\sin x}$
- b)
- $\operatorname{tg}(x)$
- c)
- $\frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$
- d)
- $\operatorname{cotg}(x)$

3) La forme exponentielle du complexe $\frac{\sqrt{3} - i}{1 + i}$ est:

- a)
- $2e^{i\frac{\pi}{12}}$
- b)
- $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$
- c)
- $\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$
- d)
- $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$
- .

4) l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $\arg\left(\frac{z - i}{z}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [\pi]$ est:

- a) Un cercle privé d'un point b) Un cercle privé de deux points c) une demie droite privée d'un point.

Exercice n°2

Dans le plan complexe on note M le point d'affixe z

1°) Résoudre l'équation : $f(z) = 1 + 2i$.Mettre la solution z_0 sous la forme cartésienne.Déterminer les coordonnées du point B dont l'affixe est z_0 .2°) Soit z un élément de E. On note r le module de $z + i$ et α une mesure de son argument.Mettre $z + i$ puis $f(z) - i$ sous la forme exponentielle.Exprimer la forme trigonométrique de $f(z) - i$ en fonction de r et α .3°) Soit A le point d'affixe $-i$.

- a) Interpréter géométriquement les expressions :
- $|z + i|$
- et
- $\operatorname{Arg}(z + i)$
- .

Déterminer l'ensemble C des points M vérifiant $|f(z) - i| = \sqrt{2}$ et l'ensemble D des points M tels que $\frac{\pi}{4}$ soit une mesure de l'argument de $f(z) - i$.

- b) Montrer que B appartient à C et D et construire C et D.

Exercice n°3Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$.1°/ a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur \mathbb{R} .b) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .2°/ a) Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} sur $] -1, 1 [$ et tracer la courbe C' de f^{-1} dans le même repère.

- b) Trouver l'expression de
- $f^{-1}(x)$
- . Soit f l'application : de
- $E = \mathbb{C} - \{-i\}$
- dans
- \mathbb{C}
- définie par :
- $z \rightarrow f(z) = \frac{iz}{z+i}$
- .



Exercice n°4

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x + 5}{(x-1)^2}$.

Soient (C) sa courbe dans un plan rapporté à repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1°) a) Déterminer trois réels a, b, c tels que, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, on ait : $f(x) = a x + b + \frac{c}{(x-1)^2}$.

b) Etudier les variations de f .

2°) a) Etudier la position de (C) par rapport à son asymptote oblique.

b) Montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet, dans \mathbb{R} , une seule solution x_0 et que : $x_0 \in]-2, -1[$.

c) Construire (C) .

Solutions (Indication)

Exercice1 : : a-d-c-b

Exercice2 :

1°) $z_0 = \frac{2-i}{1+i} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$; $B (1/2, -3/2)$

2°) $z + i = r e^{i\alpha}$ et $f(z) - i = \frac{1}{r} e^{-i\alpha}$.

$f(z) - i = \frac{1}{r} (\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha))$.

3°) $|z + i| = AM$ et $\text{Arg}(z + i) \equiv (\vec{OA}, \vec{AM}) [2\pi]$.

C est le cercle de centre A et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D est la demi-droite $[A, x)$ telle que : $(\vec{OA}, \vec{Ax}) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$ privée du point A .

Exercice3 :

1°) a) Continuité

La fonction $x \mapsto x$ est continue sur \mathbb{R} donc la fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur \mathbb{R} et par suite f est continue sur \mathbb{R} comme quotient de deux fonctions continues sur \mathbb{R} .

Dérivabilité

Si $x \in]-\infty; 0[$ $f(x) = \frac{x}{1-x}$ et si $x \in]0; +\infty[$ $f(x) = \frac{x}{1+x}$.

Donc f est dérivable sur chacun des deux intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$ car les fonctions rationnelles sont dérivables là où elles sont définies.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{1+|x|} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+|x|} = 1$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

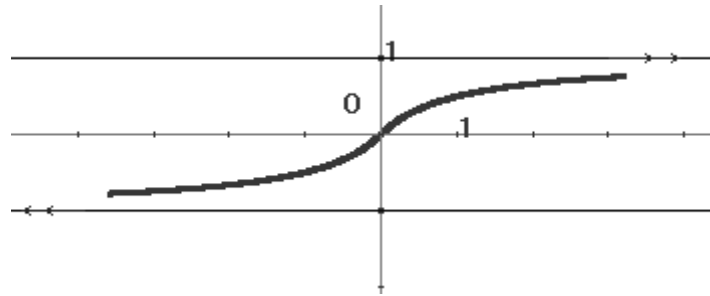
f est dérivable sur \mathbb{R} .

b) Si $x \in]-\infty; 0[$ $f'(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Si $x \in]0; +\infty[$ $f'(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)' = \frac{1}{(1+x)^2}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1-x} = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$.

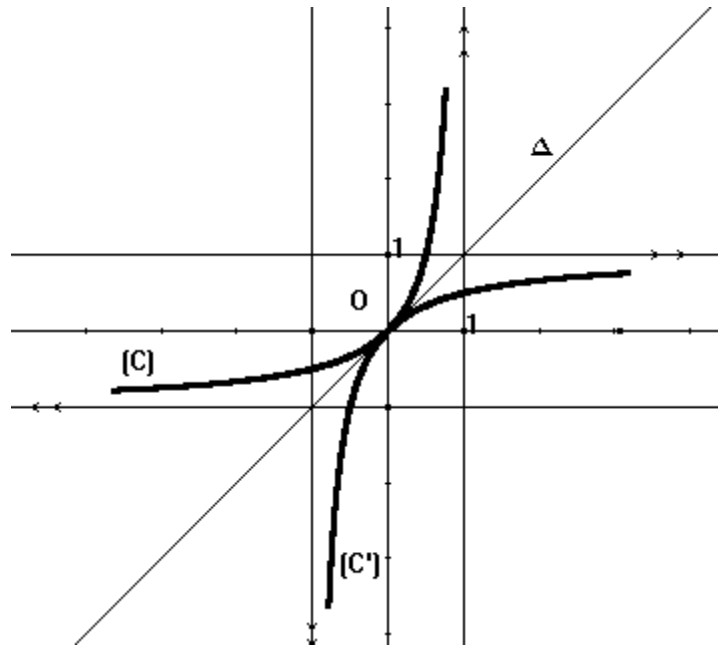
X	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-1	1



2°) a) f est strictement croissante sur \mathbb{R} donc f est une bijection de \mathbb{R} sur $f(\mathbb{R})$.

f est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} donc $f(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f[=]-1, 1[$.

$(C') = S_{\Delta}(C)$ où $\Delta : y = x$.



b) Soit $x \in]-1; 1[$ et $y \in \mathbb{R}$.

Si $x \geq 0$ alors $y \geq 0$

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{1+y} = x$$

$$\Leftrightarrow y = x(1+y)$$

$$\Leftrightarrow y = x + xy$$

$$\Leftrightarrow y - xy = x$$

$$\Leftrightarrow y(1-x) = x$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x}{1-x}$$

Si $x \leq 0$ alors $y \leq 0$

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow \frac{y}{1-y} = x$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x}{1+x}$$



tuniTests.tn

نجاحك يهمنا

Dans les deux cas $f^{-1}(x) = \frac{x}{1 - |x|}$.

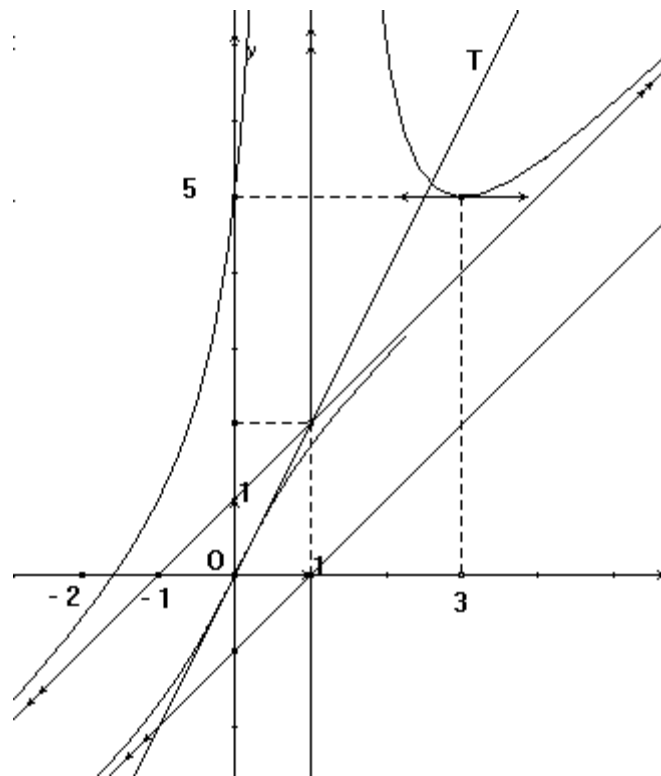
Exercice4 :

1°) a) $f(x) = x + 1 + \frac{4}{(x-1)^2}$.

b) $f'(x) = \frac{(x-9)(x^2+3)}{(x-1)^3}$.

2°) a) $f(x) - (x+1) = \frac{4}{(x-1)^2} > 0$: (C) est au dessus de son asymptote oblique $\Delta : y : x + 1$.

c)



3°) a) $g'(x) = 1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$.

b) $E = \mathbb{R}$.

c) $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{2}$